

## Serie 4

1. a) Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum korrespondierend zum zweifachen Würfelwurf. Genauer gesagt stellen wir die Menge  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$  mit der Menge der Ereignisse  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$  und der Laplace-Wahrscheinlichkeitsmass  $P$  aus. Betrachten Sie die Abbildung  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch:

$$X(\omega) = |\omega_1 - \omega_2|.$$

- Erklären Sie, wieso  $X$  eine Zufallsvariable ist.
  - Berechnen Sie die Verteilungsfunktion  $F_X$  von  $X$ .
- b) Betrachten Sie nun das Modell der Gleichverteilung auf  $\Omega = [0, 1]^2$  mit  $\mathcal{F}$  die Borel- $\sigma$ -Algebra auf  $[0, 1]$ .<sup>1</sup> Wir definieren die Abbildung  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch:

$$Y(\omega) = 2\omega_1 + 2\omega_2.$$

(mit der Notation aus der Vorlesung entspricht das dem Umfang des Rechtecks  $R(\omega)$ ).

- Zeige, dass  $Y$  eine Zufallsvariable ist.
  - Berechnen Sie die Verteilungsfunktion  $F_Y$  von  $Y$ .
2. Gegeben sei eine Zufallsvariable  $X$  mit der Verteilungsfunktion

$$F(a) = \begin{cases} 0 & \text{falls } a < 0 \\ a/2 & \text{falls } 0 \leq a < 1 \\ 2/3 & \text{falls } 1 \leq a < 2 \\ (a+1)/4 & \text{falls } 2 \leq a < 3 \\ 1 & \text{falls } 3 \leq a \end{cases}$$

- a) Zeichne diese Verteilungsfunktion.
- b) Bestimme folgende Wahrscheinlichkeiten:  $P[\{X < 1\}]$ ,  $P[\{X = 2\}]$ ,  $P[\{X = 3\}]$ ,  $P[\{1 < X \leq 2\}]$ ,  $P[\{1 \leq X < 2\}]$  und  $P[\{X \geq 3/2\}]$ .

---

<sup>1</sup>Diese ist definiert als die kleinste Menge von Teilmengen von  $\Omega$ , die H1 – H3 aus Definition 1.2 erfüllt und alle Mengen  $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ ,  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1$ ,  $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq 1$  enthält.

3. Fünf faire Münzen werden nacheinander geworfen. Sei  $X$  die Zufallsvariable, welche die totale Anzahl erschienenen "Köpfe" zählt. Am Anfang setzen Sie 1 Franken Einsatz, wobei sie bei jedem Münzwurf 10% Ihres Einsatzes gewinnen, falls "Kopf" erscheint, und verlieren 10% ihres Einsatzes, falls "Zahl" erscheint. Vor jedem Münzwurf setzen Sie Ihren gesamten Wetteinsatz. Wir bezeichnen mit  $Y$  Ihren totalen Geldbetrag nach den fünf Münzwürfen.

a) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von  $X$ .

b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von  $Y$ .

HINWEIS: Finden Sie  $f$ , so dass  $Y = f(X)$ .

**Abgabe:** Montag 16. März in der Übungsstunde.