

Serie 4

1. a) Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum korrespondierend zum zweifachen Würfelwurf. Genauer gesagt stellen wir die Menge $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$ mit der Menge der Ereignisse $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und der Laplace-Wahrscheinlichkeitsmass P aus. Betrachten Sie die Abbildung $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$X(\omega) = |\omega_1 - \omega_2|.$$

- Erklären Sie, wieso X eine Zufallsvariable ist.
 - Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F_X von X .
- b) Betrachten Sie nun das Modell der Gleichverteilung auf $\Omega = [0, 1]^2$ mit \mathcal{F} die Borel- σ -Algebra auf $[0, 1]$.¹ Wir definieren die Abbildung $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch:

$$Y(\omega) = 2\omega_1 + 2\omega_2.$$

(mit der Notation aus der Vorlesung entspricht das dem Umfang des Rechtecks $R(\omega)$).

- Zeige, dass Y eine Zufallsvariable ist.
 - Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F_Y von Y .
2. Gegeben sei eine Zufallsvariable X mit der Verteilungsfunktion

$$F(a) = \begin{cases} 0 & \text{falls } a < 0 \\ a/2 & \text{falls } 0 \leq a < 1 \\ 2/3 & \text{falls } 1 \leq a < 2 \\ (a+1)/4 & \text{falls } 2 \leq a < 3 \\ 1 & \text{falls } 3 \leq a \end{cases}$$

- a) Zeichne diese Verteilungsfunktion.
- b) Bestimme folgende Wahrscheinlichkeiten: $P[\{X < 1\}]$, $P[\{X = 2\}]$, $P[\{X = 3\}]$, $P[\{1 < X \leq 2\}]$, $P[\{1 \leq X < 2\}]$ und $P[\{X \geq 3/2\}]$.

¹Diese ist definiert als die kleinste Menge von Teilmengen von Ω , die H1 – H3 aus Definition 1.2 erfüllt und alle Mengen $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$, $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1$, $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq 1$ enthält.

3. Fünf faire Münzen werden nacheinander geworfen. Sei X die Zufallsvariable, welche die totale Anzahl erschienenen "Köpfe" zählt. Am Anfang setzen Sie 1 Franken Einsatz, wobei sie bei jedem Münzwurf 10% Ihres Einsatzes gewinnen, falls "Kopf" erscheint, und verlieren 10% ihres Einsatzes, falls "Zahl" erscheint. Vor jedem Münzwurf setzen Sie Ihren gesamten Wetteinsatz. Wir bezeichnen mit Y Ihren totalen Geldbetrag nach den fünf Münzwürfen.

a) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von X .

b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von Y .

HINWEIS: Finden Sie f , so dass $Y = f(X)$.

Abgabe: Montag 16. März in der Übungsstunde.